

ONDAS CONFINADAS FUERTEMENTE NOLINEALES EN FLUIDOS TERMOVISCOSOS: ALGUNOS EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

REFERENCIA PACS: 43.25.Gf

Campos-Pozuelo, Cleofé ¹; Vanhille, Christian ²

1 Instituto de Acústica, CSIC.

Serrano, 144

28006 Madrid. España

Tel: 34 915 618 806

E-Mail: ccampos@ia.cetef.csic.es

2 ESCET, Universidad Rey Juan Carlos.

Tulipán, s/n

28933 Móstoles, Madrid. España

Tel: 34 916 647 482

E-Mail: c.vanhille@escet.urjc.es

ABSTRACT

Strongly nonlinear standing waves in an one-dimensional rigid walled tube are numerically studied by using a finite difference algorithm. Calculations are performed exclusively in the time domain. No approximations about the Mach number are considered. Effects of absorption due to bulk attenuation are included and no approximations about its value are done. Different numerical experiments are shown including the formation of a strongly nonlinear continuous standing wave as well as the behaviour of pulsed waves.

RESUMEN

El estudio del comportamiento de ondas de amplitud finita confinadas en resonadores acústicos es uno de los campos de investigación más prometedores en acústica no lineal, además de por su interés inherente también de cara a toda una gama de aplicaciones físicas y de ingeniería. Sin embargo la falta de una maquinaria matemática suficientemente desarrollada es un impedimento para la puesta a punto de tales aplicaciones. En este contexto, se presenta aquí un estudio numérico de ondas acústicas de gran amplitud confinadas en una cavidad cilíndrica. Las peculiaridades de este tipo de ondas, que son consecuencia fundamentalmente del comportamiento no lineal del fluido, se explican e ilustran mediante resultados de diferentes experimentos numéricos. Para ello se desarrolló un código de cálculo numérico, basado en un algoritmo de alto orden e implícito de diferencias finitas. El algoritmo numérico, en contraposición con otros que estudian el mismo problema físico y que se pueden encontrar en la literatura [1], resuelve la ecuación completamente no lineal, sin ningún tipo de aproximación en lo que se refiere al número de Mach y/o al valor de la atenuación, además de trabajar en el dominio del tiempo.

A. PROBLEMA CONSIDERADO

Se considera un fluido homogéneo termoviscoso confinado en un tubo de paredes rígidas y excitado mediante un pistón en uno de sus extremos. La ecuación de estado del fluido responde a la aproximación de Tait-Kirwood [2]. Se han considerado coordenadas lagrangianas y no se ha despreciado ningún término en la ecuación de ondas que resulta de la combinación de la ecuación de Tait-Kirkwood con las de conservación [3,4], es decir, no se ha hecho

ninguna aproximación en lo que se refiere al valor del número de Mach acústico o la atenuación. Por lo tanto el código es válido tanto desde el caso puramente lineal como para una onda de choque (en la aproximación de "choque débil", se entiende). Existen en la literatura reciente algunas otras aproximaciones numéricas para resolver problemas físicos muy parecidos al planteado aquí, de especial interés resulta la referencia [1], donde una ecuación de tercer orden en la presión acústica es resuelta en el dominio de la frecuencia. Como ya se ha dicho, se resuelve ahora la ecuación completamente no lineal obtenida directamente de la ecuación de Tait-Kirkwood. Además, el hecho de que el algoritmo numérico se haya desarrollado en el dominio del tiempo, aporta considerables ventajas tanto desde el punto de vista de tiempo de cálculo, (debido a que todas las componentes armónicas de la onda distorsionada son obtenidas en una sola ejecución del programa [4]) como desde el punto de vista de acercamiento al fenómeno físico estudiado dando información sobre la fase transitoria y la respuesta de la cavidad cuando se excita por un pulso de corta duración.

B. MÉTODO EMPLEADO

En este trabajo se presenta la resolución de la ecuación de ondas fuertemente no lineal obtenida de forma directa de la combinación de las leyes de conservación y la ecuación de estado para un fluido a entropía constante, escrita en coordenadas lagrangianas:

$$\mathbf{r}_0 \frac{\mathcal{I}^2 u}{\mathcal{I} t^2} = p_0 \mathbf{g} \frac{1}{\left(1 + \frac{\mathcal{I} u}{\mathcal{I} x}\right)^{g+1}} \frac{\mathcal{I}^2 u}{\mathcal{I} x^2} + \mathbf{n} b \frac{\mathcal{I}^3 u}{\mathcal{I} t \mathcal{I} x^2} \quad (1)$$

donde u es el desplazamiento, función de x y t , respectivamente la variable espacial unidimensional y la variable temporal. p_0 representa la presión en reposo, \mathbf{r}_0 la densidad del fluido en reposo, \mathbf{g} la relación de calores específicos, \mathbf{n} la viscosidad cinemática y b el número de viscosidad.

La presión se puede evaluar mediante la expresión:

$$p = \frac{p_0}{\left(1 + \frac{\mathcal{I} u}{\mathcal{I} x}\right)^g} - Q \quad (2)$$

Se considera el fluido en reposo absoluto en el estado inicial. Las condiciones iniciales son, por tanto:

$$t = 0 \quad \begin{cases} u(x,0) = 0 \\ \frac{\mathcal{I} u(x,0)}{\mathcal{I} t} = 0 \quad \forall x \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$

La cavidad estudiada se considera totalmente rígida, es decir, la condición de contorno en el extremo del tubo es

$$x = L \quad u(L,t) = 0 \quad (4)$$

En el caso de que la excitación del medio se realice mediante una fuente armónica, la condición en el pistón se escribe:

$$x = 0 \quad u(0,t) = u_0 \sin(\mathbf{w} t) \quad (5)$$

Sin embargo cuando la excitación es un pulso de corta duración, el desplazamiento en el pistón se puede escribir:

$$x = 0 \quad u(0,t) = u_0 \sin(\mathbf{w} t) e^{-x_b^2 (t-t_0)^2} \quad (6)$$

donde $\mathbf{w} = 2\pi f$ es la pulsación, u_0 la amplitud de desplazamiento de excitación, x_b la anchura del pulso y t_0 el instante de centrado del mismo.

Para resolver la ecuación (1) y las condiciones (3), (4), (5) o (6) se ha desarrollado un algoritmo numérico original basado en el método en diferencias finitas [5]. En una primera etapa se introducen variables independientes adimensionadas y se discretiza el espacio de trabajo. El tratamiento numérico de la derivada parcial de orden 3 que aparece en la ecuación (1) ha exigido un esquema en diferencias finitas de orden elevado e implícito. Por tanto para cada etapa temporal del cálculo un sistema de ecuaciones debe ser resuelto, en este caso, por el método de Gauss. Una vez obtenido el desplazamiento en los puntos de discretización del espacio, la presión se evalúa mediante el tratamiento numérico de la ecuación (2). Con ello el esquema global que se obtiene permite simular el comportamiento de la onda en el tubo.

C. ALGUNOS EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

En este apartado se presentan algunos experimentos numéricos llevados a cabo con la herramienta presentada en el apartado anterior. En la primera parte consideramos una excitación armónica y en la segunda parte excitamos el fluido mediante un pulso. Los valores de atenuación que se emplean corresponden al propio efecto del fluido más una evaluación de las pérdidas que generan las paredes rígidas; la relación de dispersión considerada es la que se deriva de la ecuación (1).

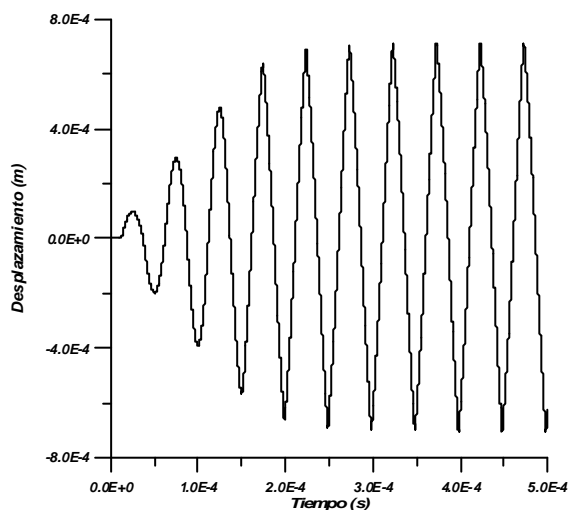


Fig. 1.a. Forma de onda en desplazamiento en el centro del tubo

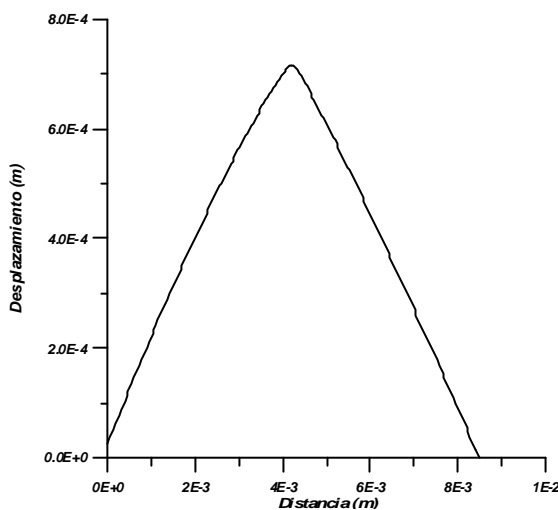


Fig. 1.b. Distribución de desplazamiento en un punto de máximo en el centro

C.1. Excitación Armónica

En este apartado ilustramos las posibilidades del código descrito anteriormente mediante un ejemplo de excitación armónica. Consideramos un tubo de aire de longitud $L = 8.5 \times 10^{-3} m$ excitado armónicamente por el pistón a la frecuencia $f = 20000 Hz$. Las características del aire consideradas en el cálculo son las siguientes: $c_0 = 340 m/s$, $\rho_0 = 1.29 kg/m^3$, $\alpha = 1.81 m^{-1}$, $\beta = 1.6$. El desplazamiento en el pistón de excitación es $u_0 = 100 \mu m$. El estudio se lleva a cabo durante 10 periodos. 201 puntos espaciales son necesarios para asegurar la convergencia; El número de puntos temporales empleados es 5438. El desplazamiento y la presión obtenidos en el tubo están representados respectivamente en las figuras 1 y 2. Se puede apreciar en la figura 1 como se hace aguda la distribución de desplazamiento en el tubo. La aparición del diente de sierra en la forma de onda se hace evidente en la figura 2. En la Figura 3 se muestra una representación espacio-temporal de un periodo una vez alcanzado el estado estacionario. La aparición del choque débil se hace notar en la distribución de la onda de presión en el tubo, así como la inexistencia de un nodo real: el nodo de presión se va desplazando a lo largo de casi toda la longitud del tubo mediante un movimiento de idas y vueltas característico de ondas estacionarias de muy alta

amplitud (fig. 3). Nótese, tanto en la Figura 2 como en la 3 los bruscos cambios de fase característicos de la onda de choque. De hecho de la observación detallada de estas figuras podemos concluir que para estas altísimas amplitudes (del orden del 50% de sobrepresión a 20 kHz) se tiene, prácticamente, un frente de onda vertical que se “propaga” de un extremo a otro de la cavidad reflejándose en los extremos rígidos de la cavidad. Sin embargo, la onda sigue siendo estacionaria y conservando la periodicidad a la frecuencia de excitación (Figura 3). En la figura 4 se representa la FFT de la onda en el reflector. Se puede apreciar cuáles son los armónicos que actúan para distorsionar la onda: aquí, aparte del armónico 0 y del fundamental, se deben tomar en cuenta los armónicos hasta el orden 20. En el caso considerado aquí, el número de Mach acústico obtenido es $M = ku_{\text{maximo}} = 0.2658$. El tiempo CPU necesario ha sido de 1 hora con un procesador Pentium II MMX de 300 MHz y 64 MB de Ram.

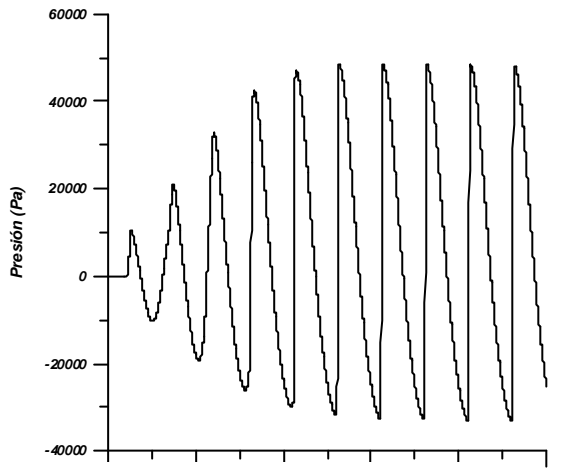


Fig. 2.a. Forma de onda de la presión en el reflector

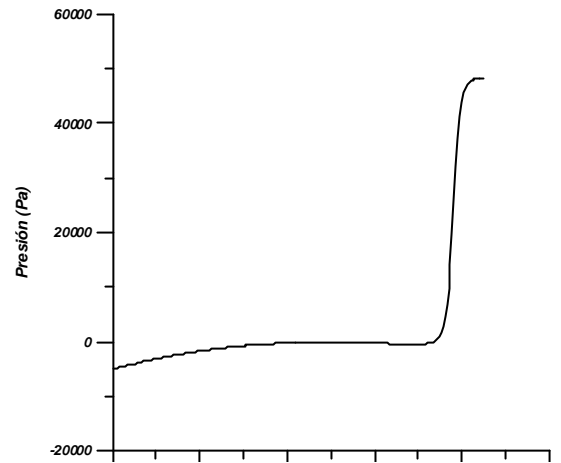


Fig. 2.b. Distribución de presión en un punto de máximo en el reflector

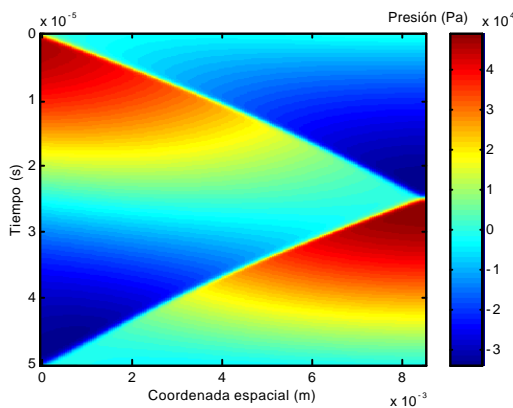


Fig. 3. Representación espacio-temporal de la presión en un periodo

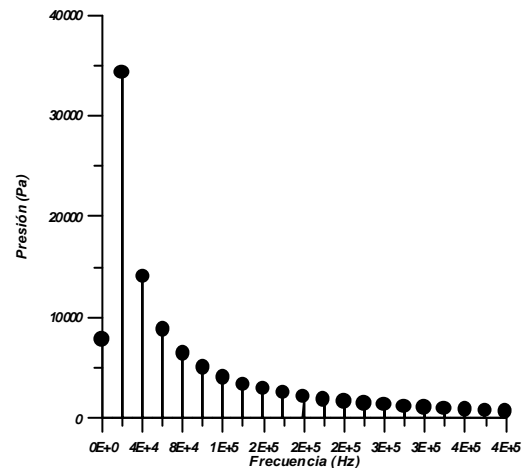


Fig. 4. FFT en el reflector

C.2. Pulso

En este apartado se considera la cavidad excitada por un pulso centrado en su frecuencia de resonancia. El aire contenido en un tubo de longitud $L = \frac{1}{2}$ es excitado mediante un pistón que da un impulso a la frecuencia $f = 60000 \text{ Hz}$. Las características del medio consideradas son: $c_0 = 340 \text{ m/s}$, $\rho_0 = 1.29 \text{ kg/m}^3$, $\alpha = 18 \text{ m}^{-1}$, $\beta = 1.6$. El pulso,

definido por $t_0 = 2.5 \times 10^{-5}$, $x_b = 1 \times 10^{-5}$ se representa en la figura 5. De nuevo se considera un caso fuertemente no lineal $u_0 = 100 \text{ mm}$ a 60 kHz , que se representará en comparación con el resultado equivalente de un cálculo puramente lineal. Se estudian 150 periodos. Utilizamos 51 puntos espaciales para el caso lineal y 101 puntos en el caso no-lineal. La figura 6 compara las formas de onda en el reflector. Se puede observar cómo en el caso no-lineal se está generando la distorsión de la onda, obteniéndose un claro diente de sierra. La "cola" de la señal se atenúa de forma mucho más rápida en el caso no lineal, aunque, por supuesto, la atenuación considerada es la misma. En la Figura 7 se representa la Transformada de Fourier Rápida de este mismo resultado, realizada también numéricamente. Aunque la frecuencia de resonancia no cambie la forma de los picos aparece claramente asimétrica. En cualquier caso la distorsión de la onda no es la misma en cada momento del pulso (debido a que la generación de armónicos no es simultánea, sino que existe un cierto retardo a medida que subimos de orden) por lo que este resultado en el dominio de las frecuencias debe ser interpretado con cuidado.

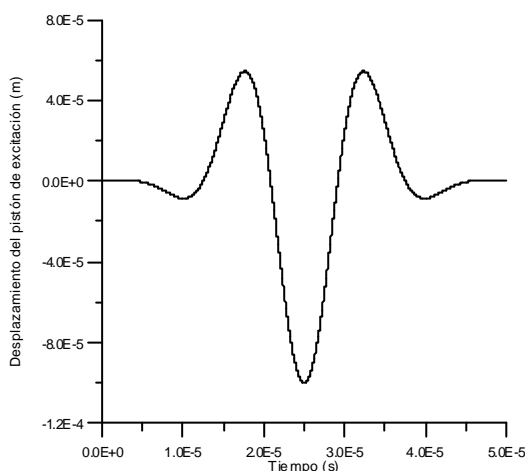


Figura 5. Representación del pulso empleado

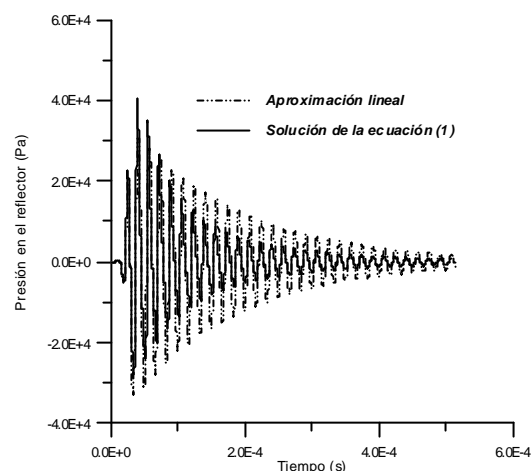


Figura 6.a. "Free-decay" en un tubo resonante

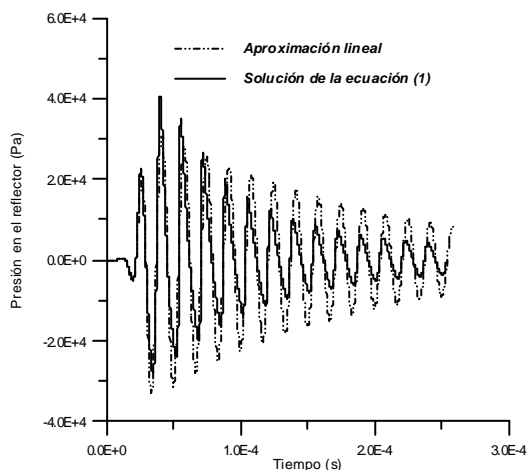


Figura 6.b. "Free-decay" en el tubo - primeros periodos

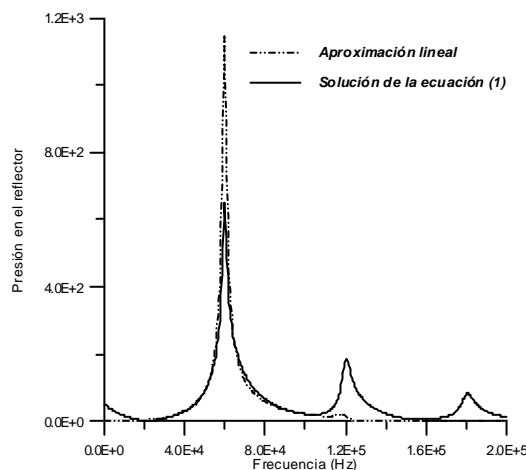


Figura 7. FFT en el caso lineal (verde) y en el caso no-lineal (azul)

D. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado una herramienta numérica para la simulación de ondas acústicas estacionarias de gran amplitud. Trabajando en el dominio del tiempo, permite analizar una amplia gama de problemas en un tiempo de cálculo bastante eficiente. No se ha hecho ninguna hipótesis ni sobre el número de Mach acústico ni sobre el valor de la

atenuación. Varios ejemplos han sido considerados aquí: un caso armónico y un pulso. Los resultados muestran la evolución desde el caso lineal hasta la formación del frente de choque.

BIBLIOGRAFÍA

1. Y. A. Ilinskii, B. Lipkens, T. S. Lucas, T. W. Van Doren and E. A. Zabolotskaya, "Nonlinear standing waves in an acoustical resonator", *J. Acoust. Soc. Am.*, 104 (5), pp. 2664-2674 (1998)
2. D. A. Sullivan, "Historical Review of Real-Fluid Isentropic Flow Models", *Transactions of the ASME, Journal of Fluids Engineering*, 103, 258-267 (1981)
3. R. T. Beyer, "Nonlinear acoustics" in *Physical Acoustics*, ed. W. P. Mason (Academic Press, New York) **Vol. II-Part B**, pp 231-332 (1965).
4. *Nonlinear Acoustics*, Ed. By M.F. Hamilton and D. T. Blackstock (Academic Press), (1998)
5. G. D. Smith, *Numerical solution of partial differential equations, Finite Difference Methods*, Clarendon Press, Oxford, 3rd ed., (1985)