

## PROPAGAÇÃO ACÚSTICA EM UM CORPO D'ÁGUA RASO USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

REFERÊNCIA PACS: 43.30.Pc

Sônia Maria Constantino Ferreira; Humberto Camargo Piccoli  
Fundação Universidade Federal do Rio Grande  
Av. Itália km 8, CEP 96201-900, Caixa Postal 474  
Rio Grande – RS. Brasil  
Tel: 532 336 796; 0532-336756  
Fax: 532 336 619  
E-Mail: dmtsmcf@super.furg.br; piccoli@dmc.furg.br

### ABSTRACT

In this work a numerical implementation is presented in order to simulate the wave acoustic propagation in two-dimensional domain of shallow water with known local characteristics. The model is developed using the finite elements method. A benchmark problem considered by the members of the Acoustical Society of America (ASA), is used to validate the model efficiency. As a result the acoustic pressure obtained through a simulation in a real transversal profile of the Rio Grande Port access canal, Brasil, are graphicly drawn.

### RESUMO

En este trabajo es apresentado un modelo numérico en dos dimensiones com el objetivo de simular la propagación de una onda acústica en un cuerpo de agua poco profundo, com características locales conocidas. El modelo es desarrollado usando el método de los elementos finitos. Para validar la eficiencia es usado un problema considerado de referencia por los miembros de la *Acoustical Society of America (ASA)*. Son simuladas aplicaciones en un perfil transversal real del canal de acceso al Puerto de Rio Grande, Brasil, y los valores de la presión acústica obtenidas como resultado trazadas graficamente.

### 1. INTRODUÇÃO

O principal objetivo do modelo numérico apresentado neste trabalho é simular a propagação da onda acústica, com boa precisão, em uma região bidimensional de um corpo d'água raso.

Quando as ondas acústicas do oceano interagem significativamente com seus fundo e subfundo, a velocidade do som e a massa específica podem ser manuseadas mais precisamente usando o método de diferenças finitas ou o método de elementos finitos. São soluções dependentes da distância e que produzem soluções numéricas altamente precisas para a equação da onda acústica. Esses métodos são lentos quando comparados com outras técnicas, mas podem responder com alta precisão em cenários de acústica oceânica com características peculiares, segundo *Robinson e Lee (1994)*.

Isto justifica a escolha do método de elementos finitos pois o objetivo é a simulação em um perfil do canal de acesso ao Porto do Rio Grande, Brasil, que por trabalharmos com profundidade real, apresenta contorno irregular. O domínio é discretizado bidimensionalmente através de uma malha estruturada para o problema de referência, devido às grandes dimensões apresentadas e à necessidade de elementos triangulares com dimensões laterais o mais semelhantes possíveis entre si, para obtenção de melhores resultados. Entretanto, uma malha não estruturada é usada para o perfil com características reais simulado com o modelo implementado.

## 2. EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA ONDA ACÚSTICA E TERMO FONTE

A equação discretizada é a equação da onda acústica homogênea no domínio do tempo

$$\rho \nabla \cdot \left[ \frac{1}{\rho} \nabla P(r,t) \right] - \frac{1}{c^2(r,t)} \frac{\partial^2 P(r,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

onde,  $P$  é a pressão acústica,  $\rho$  é a massa específica da água,  $c$  é a velocidade do som,  $r$  é o vetor posição e  $t$  é o tempo. Em muitas situações de interesse na acústica são consideradas massa específica da água e velocidade do som constantes. Então

$$\frac{\partial^2 P(r,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(r,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P(r,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2)$$

Fontes são introduzidas na equação da onda acústica pela adição de um termo fonte  $F(r,t)$  no termo do lado direito da Equação (2.2), resulta

$$\frac{\partial^2 P(r,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(r,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P(r,t)}{\partial t^2} = -4\pi F(r,t) \quad (2.3)$$

que é chamada equação da onda não-homogênea. Quando é considerada uma dependência harmônica com o tempo  $F(r,t)=f(r,t)e^{-i\omega t}$ .

## 3. CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO

Como condições iniciais *Stephen* (1990) apresenta deslocamentos e velocidades nulos em todos os pontos do domínio.

Conforme *Caruthers* (1979) como condições de contorno, na fronteira superior, correspondente a superfície do oceano liberar pressão em  $z = h$ , a pressão é considerada nula,  $P = 0$ . Isto é simulado introduzindo uma linha imaginária ao longo do topo, no domínio. Em um

fundo rígido, de reflexão total em  $z = 0$ , temos  $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$ . Sendo o contorno  $\Gamma = \Gamma_s + \Gamma_l$

onde,  $\Gamma_s$  é o contorno superior e  $\Gamma_l$  é o contorno inferior do domínio discretizado.

## 4. FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A EQUAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA EM ÁGUAS RASAS

A progressiva performance que os computadores apresentam deu início ao uso de técnicas numéricas que uma vez eram consideradas computacionalmente vagarosas demais e necessitavam muita memória para alguma aplicação acústica real. Uma das notáveis evoluções nos modelos acústicos, afirmado por *Robinson e Lee* (1990), é a utilização do método dos elementos finitos, que pode produzir precisas soluções numéricas para a equação da onda.

Na equação da onda acústica, equação ( 2.2 ), é necessário introduzir o termo de amortecimento,  $\beta \frac{\partial P}{\partial t}$  onde,  $\beta$  é o coeficiente de amortecimento, para estabilização numérica do método. Temos

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial P}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.1)$$

Segundo *Araújo* (1995), utilizando o método dos elementos finitos, a pressão acústica em um ponto genérico do elemento é dada por

$$P = \mathbf{N} \mathbf{P} \quad (4.2)$$

onde,  $\mathbf{N}$  é a matriz linha com as funções de interpolação dos elementos do domínio e  $\mathbf{P}$  é o vetor de pressão nos nós do elemento.

Aplicando o método de Galerkin, a equação ( 4.1 ) é escrita na forma integral

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{\beta}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} \right) d\Omega = 0 \quad (4.3)$$

onde,  $\Omega$  representa o domínio de fluido.

Integrando por partes os dois primeiros termos da equação ( 4.3 ), aplicando o teorema da divergência, considerando as interpolações representadas pela equação ( 4.2 ) e sendo  $\mathbf{N}$  constante, chega-se ao sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$\mathbf{E} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \mathbf{G} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{H} \mathbf{P} = \mathbf{F} \quad (4.4)$$

sendo,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad \mathbf{F} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \frac{\partial P}{\partial n} d\Gamma, \quad \mathbf{G} = \frac{\beta}{c^2} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad \mathbf{H} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \right) d\Omega$$

onde,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  representam as matrizes de massa e rigidez da pressão acústica, respectivamente.  $\mathbf{F}$  é o vetor do termo fonte e das condições de contorno em  $\mathbf{G}_s$ , contorno superior, pois as condições de contorno em  $\mathbf{G}_i$ , contorno inferior, são  $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$ . O sistema de

equações diferenciais, Equação ( 4.4 ), deve ser transformado em um sistema de equações algébricas. Adotando o método de Newmark (*Bathe e Wilson*, 1976), com coeficientes de estabilização  $\delta = 0,5$ ,  $\alpha = 0,25$  e sendo  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  o tamanho do intervalo de tempo. Aplicando na equação diferencial ( 4.4 ) no instante  $t_{i+1}$  chega-se à equação

$$\mathbf{E}^* \mathbf{P}_{i+1} = \mathbf{F}_{i+1}^* \quad (4.5)$$

onde,

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{E} + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \mathbf{G} + \mathbf{H} \quad \text{e}$$

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}_{i+1} + \left[ \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \frac{\partial^2 \mathbf{P}_i}{\partial t^2} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial t} + \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{P}_i \right] \mathbf{E} + \left[ \left( \frac{\delta \Delta t}{2\alpha} - \Delta t \right) \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \left( \frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \mathbf{P}_i \right] \mathbf{G}$$

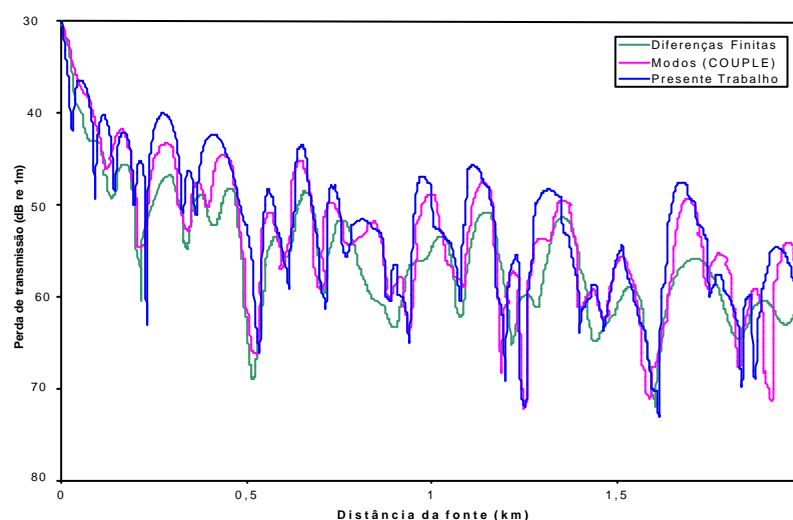
e que fornece os valores das pressões acústicas nodais relativas, no intervalo de tempo. Com  $P_i$  calculado parte-se para o próximo instante e repete-se o processo de forma que o vetor  $F$  é obtido com  $P$  no instante anterior. Ao final de cada incremento de tempo é necessário atualizar  $\frac{\partial P}{\partial t}$  e  $\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$ , calcular  $F^*$  que será usado no instante seguinte para obter o vetor  $P$ , na Equação (4.5).

## 5. VALIDAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS IMPLEMENTADO

Em uma sessão especial do 112<sup>o</sup> Encontro da Acoustical Society of America (ASA) três problemas de referência foram discutidos. Um desses problemas, envolvendo propagação acústica em domínio com fundo de reflexão perfeita e com perfil de velocidade do som dependente da posição, foi abordado há mais de uma década atrás por DeSanto, tendo uma solução bidimensional exata que empregava modos. A implementação numérica da solução de DeSanto foi usada subsequentemente para obter previsões de perdas de transmissão versus distância em uma segunda sessão especial ocorrida durante o 113<sup>o</sup> Encontro da *Acoustical Society of America*, segundo *Thomson e Brooke* (1990).

Vários outros autores se referem a estes problemas discutidos e simulam seus resultados. Dentre estes autores, merecem destaque, *Jensen e Ferla* (1990) que separou as simulações em casos detalhados a serem estudados, um dos quais com as seguintes características: guia de onda plano e paralelo, domínio localizado em um corpo d'água raso e fonte de baixa frequência. Também *Stephen* (1990) abordou o citado problema, que é implementado nesse trabalho, com o objetivo de avaliar o desempenho qualitativo do modelo numérico desenvolvido. Nesta aplicação, é considerado um domínio retangular com 500 m de profundidade e 4000 m de largura.

A fonte pontual, de frequência 25 Hz, está localizada na profundidade de 250 m e o cálculo das perdas de transmissão é realizado nos pontos localizados na linha horizontal da fonte ao término do tempo total de duração de iteração, 3.33 s, igual ao simulado pelo autor (*Stephen*, 1990). Para ser obtida uma boa precisão nos resultados, a discretização do domínio foi executada em apenas uma parte, 500m de altura e 2000 m de largura, devido à insuficiência de memória de computador para ser processada com as dimensões usadas pelos autores que discutiram o problema. A malha estruturada, com 40501 nós e 80000 elementos apresenta elementos com formato de triângulos retângulos medindo 5 m em cada cateto. O coeficiente de amortecimento usado foi  $\beta=3,5$ .



**Figura 5.1** – Solução de *Stephen* (1990) nos primeiros 2000 m e sobreposição do presente trabalho.

Na Figura 5.1 é mostrada a solução obtida por Stephen (1990) relativa ao domínio citado onde, nos primeiros 2000 m, é sobreposta a solução obtida com a implementação do modelo usando elementos finitos desenvolvido neste trabalho. As perdas de transmissão foram calculadas conforme citado por Jensen and Ferla (1990), usando a expressão

$$PL = - 20 \log_{10} \frac{\text{pressão em um campo pontual}}{\text{pressão a um metro da fonte}}$$

A pressão acústica, a um metro da fonte, foi determinada conforme a interpolação linear sugerida por Stephen (1990). Os resultados do modelo proposto são satisfatórios e perfeitamente coerentes com os apresentados pelo autor. Em alguns pontos, mais semelhantes à solução usando modos normais do que os resultados da solução usando o método de diferenças finitas, obtida no artigo referenciado. Para uma análise mais precisa calculamos o erro quadrático médio dos resultados de ambos os métodos em relação ao método de modos normais e obtivemos os resultados da Tabela 1, abaixo.

**Tabela 1.** Tabela do erro cometido nas soluções comparadas com modos normais, programa COUPLE.

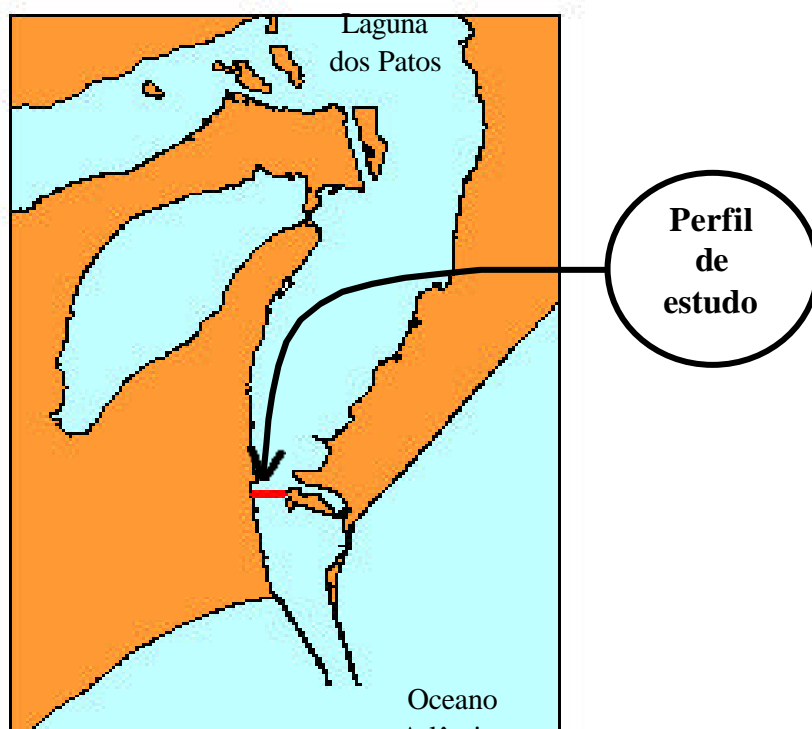
Método	Erro quadrático médio
Diferenças finitas	0,214840
Elementos finitos	0,181121

## 6. APLICAÇÃO DO MODELO IMPLEMENTADO AO DOMÍNIO SOB INVESTIGAÇÃO

Objetivando avaliar o desempenho do modelo implementado foi selecionado como domínio de investigação um perfil bidimensional do canal de acesso ao Porto do Rio Grande, perfil este assinalado na Figura 6.1.

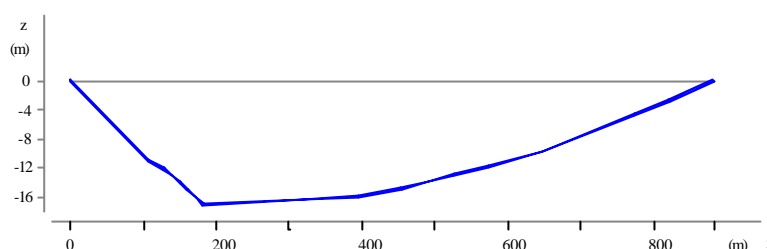
A escolha deste ambiente natural deve-se à sua grande importância para a navegação de médio e grande porte por permitir acesso a um dos principais portos brasileiros, o Porto do Rio Grande, sua importância econômica para o município do Rio Grande e do Estado do Rio Grande do Sul e a grande influência nas trocas físicas e biológicas entre dois ecossistemas por ser o canal que comunica o Oceano Atlântico à Laguna dos Patos.

O perfil bidimensional do canal foi construído com valores reais de profundidades, baseados em plantas batimétricas fornecidas pela Superintendência do Porto do Rio Grande, parte integrante do Relatório Conclusivo do levantamento batimétrico realizado no período de 23/01/97 a 30/01/97, após dragagem executada no canal. Os arquivos com os valores de profundidade foram retirados da base de dados digitalizados relativos ao canal de acesso ao Porto do Rio Grande elaborada por Neves e Cuchiara (1998).



**Figura 6.1** – Localização do perfil bidimensional de estudo.

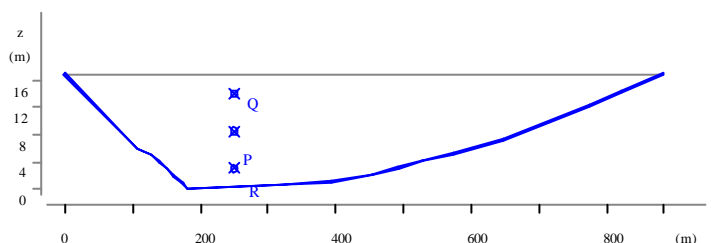
A partir dos valores da base de dados elaborou-se a Figura 6.2, contendo o esboço do perfil em estudo, tendo largura 882,26 m e profundidade máxima 16,93 m.



**Figura 6.2** – Perfil do canal de acesso ao Porto do Rio Grande.

O domínio investigado foi discretizado por uma malha obtida, através de geração não estruturada, pelo método de Avanço de Fronte, implementado por *Alquati* (1994).

Para ajuste do gerador de malhas fica mais conveniente trabalhar-se com coordenadas nodais positivas, além de não ser comum tê-las negativas. Portanto neste trabalho, a partir deste parágrafo, o referencial das cotas será conforme Figura 6.3, que também apresenta a localização dos pontos onde será posicionada a fonte, em cada simulação, conforme Tabela 2.

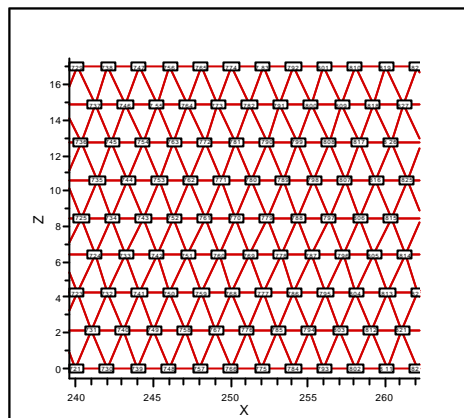


**Figura 6.3** – Localização dos pontos da Tabela 2 no perfil em estudo.

**Tabela 2** – Coordenadas dos pontos de localização da fonte.

Ponto	Número do nó	Abcissa (m)	Cota (m)
Q	782	251,2168	14,8750
R	776	251,0706	2,1250

A malha, composta por elementos isoparamétricos triangulares de três nós, contém 2709 nós e 4536 elementos. A Figura 6.4 apresenta detalhe em *zoom*, na malha de elementos triangulares, com os pontos da Tabela 2.



**Figura 6.4** – Zoom na malha apresentando os pontos da Tabela 2.

Na aplicação do modelo implementado ao domínio discretizado sob investigação são mostradas duas soluções, ambas mantendo a frequência do sinal emitido, 25 Hz, e variando a posição da fonte emissora do sinal acústico.

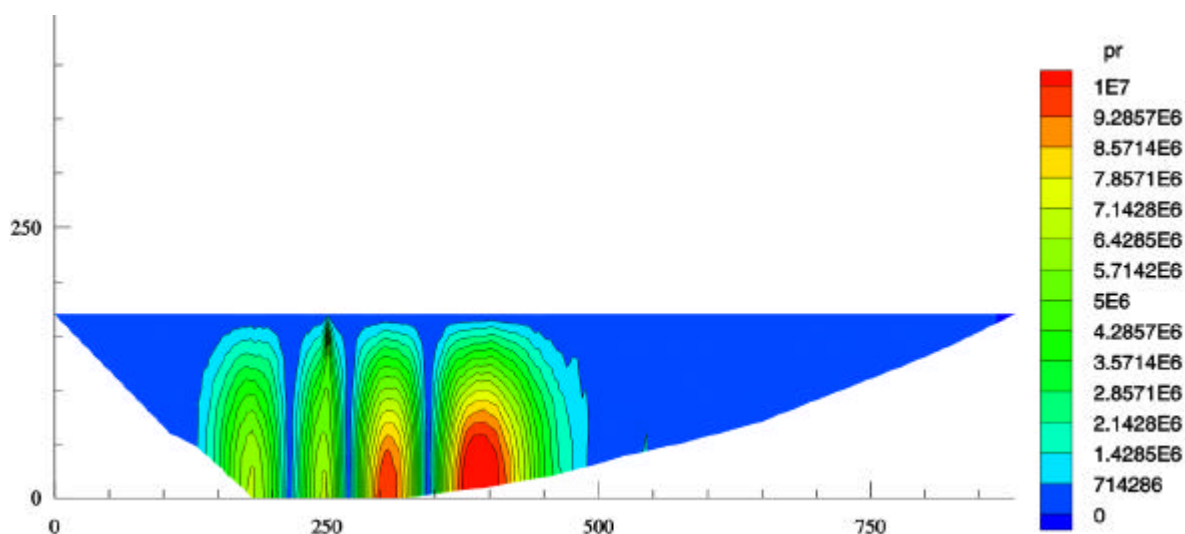
Simulou-se uma situação de inverno, quando a temperatura da lagoa é mais baixa que a temperatura do oceano, e em alto período de vazante o que ocasiona salinidade baixa. A velocidade do som na água, para o perfil em estudo, foi calculada usando a equação de Wilson (1960). Os valores adotados são os apresentados na Tabela 3.

**Tabela 3.** Valores das grandezas adotados no perfil em estudo.

Grandezas	Valores adotados
Aceleração da gravidade	9,80665 m/s <sup>2</sup>
Massa específica da água	995 kg/m <sup>3</sup>
Salinidade da água	0 ‰
Temperatura da água	10 °C
Velocidade do som na água	1451,09 m/s

São mostrados o campo de pressão acústica obtidos com a atuação de uma fonte pontual, localizada no ponto **Q**(251,2168; 14,8750) tendo unidades em metros, na Figura 6.5.

Os valores de pressão acústica, na tabela das citadas figuras, têm unidades em  $\mu\text{Pa}$ . Observa-se que os valores da variável z, plotados no eixo vertical, estão multiplicados por 10 unidades, para uma melhor visualização.



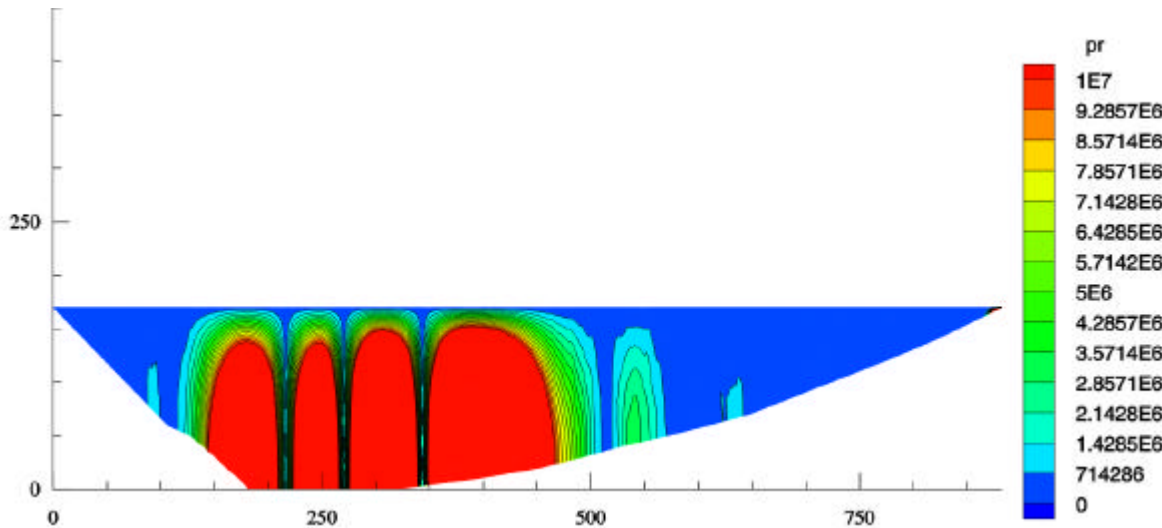
**Figura 6.5** – Campo de pressão acústica para fonte pontual em **Q(251,2168; 14,8750)**, frequência 25 Hz.

Analisando os resultados da solução numérica obtida para o campo de pressão acústica apresentado na Figura 6.5, observa-se que na superfície livre tem-se o valor da pressão acústica nula e próximo da superfície, valores muito pequenos. Estes resultados são coerentes com a condição de contorno imposta para propagação acústica em um corpo d'água raso,  $P=0$  na superfície. Pressões acústicas nulas e muito pequenas também ocorrem nas zonas laterais à direita e à esquerda da representação gráfica. Isto deve-se à distância ao ponto onde se localiza a fonte já que ocorrem perdas de transmissão no valor da pressão acústica. A propagação acústica em águas rasas é fortemente influenciada pelas características do fundo oceânico. A condição de contorno no fundo simula uma condição de radiação, sendo considerado  $\frac{\partial P}{\partial z}=0$ .

Na zona central observa-se pressões acústicas mais elevadas. O formato da representação das frentes de onda sofre decisiva influência do fundo tanto no aspecto teórico, condições de contorno, quanto na forma do perfil e isto faz com que obtenha-se posições assimétricas. Estes resultados são coerentes com o suposto comportamento dinâmico da simulação proposta que sofre influência da profundidade e, como consequência, da inclinação do fundo.

Na Figura 6.6 são mostrados o campo de pressão acústica obtidos com a atuação de uma fonte pontual, localizada no ponto **R(251,0706; 2,1250)**.

Comparando as Figuras 6.5 e 6.6, observa-se que o campo de pressão acústica assume, dentro da mesma faixa de variação, valores bem mais elevados na Figura 6.6 do que na Figura 6.5. Isto é coerente com a bibliografia, a posição da fonte foi alterada para um ponto bem mais próximo do fundo.



**Figura 6.6** – Campo de pressão acústica para fonte pontual em **R(251,0706; 2,1250)**, frequência 25 Hz.

## 7. CONCLUSÕES

Neste trabalho, lidamos com um problema que envolve a possibilidade de múltiplas reflexões entre a superfície e o fundo, interferindo um com outro e com a direção de transmissão. Em vista disso idealizamos condições teóricas e a análise dos resultados obtidos com o modelo numérico proposto mostra que o objetivo de simular, com boa precisão, a propagação da onda acústica em um domínio bidimensional de um corpo d'água raso foi



atingido. O modelo proposto é considerado validado já que os resultados obtidos apresentam qualidade similar aos publicados na bibliografia, na validação. Obtém-se boas soluções numéricas, que caracterizam as condições impostas e os efeitos físicos da dinâmica da simulação proposta, na aplicação ao simular o perfil real de canal e analisar-se a influência da variação na posição da fonte, no domínio em estudo.

Este trabalho deve ser visto como o ponto de partida para o desenvolvimento de outros e mais complexos onde as considerações impostas sejam, gradativamente, generalizadas.

## **8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- A. R. Robinson e D. Lee, "Oceanography and acoustics. Prediction and Propagation Models", American Institute of Physics, New York, 1994.
- E. L. Alquati e A. G. Groehs, Geração automática de malhas não estruturadas de elementos triangulares. In: XV CONGRESSO IBERO LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHEIROS. Anais: v. 1, p. 483-492, 1994.
- D. J. Thomson e G. H. Brooke, "Numerical implementation of a modal solution to a range-dependent benchmark problem", J. Acoust. Soc. Am. 87(4), 1521-1526 (1990).
- F. B. Jensen e C. M. Ferla, "Numerical solutions of range-dependent benchmark problems in ocean acoustics", J. Acoust. Soc. Am. 87 (4), 1499-1510 (1990).
- J. C. NEVES e D. C. CUCHIARA, Projeto: Produção de uma base de dados digitalizados relativos ao canal de acesso do Porto do Rio Grande. Rio Grande: FURG, 1998.
- J. M. Araújo, "Análise de barragens de gravidade de concreto considerando a fase construtiva e a interação dinâmica barragem-reservatório-fundação". Tese de doutorado, UFRGS, Porto Alegre, 1995.
- J. W. Caruthers, "Fundamentals of Marine Acoustics", Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1977.
- K. J. Bathe e E. L. Wilson, "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- R. A. Stephen, "Solutions to range-dependent benchmark problems by the finite-difference method", J. Acoust. Soc. Am. 87 (4), 1527-11534 (1990).
- W. D. WILSON, Equation for the Speed of Sound in Sea Water. The Journal of the Acoustical Society of America, v. 32 (10), p. 1357, 1960.