

Aplicación del método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD) al estudio de problemas acústicos bidimensionales

*Enrique A. Navarro, Jaume Segura, Raül Sanchis
Dept. Física Aplicada-Institut de Robòtica,
Universitat de València,
Polígono de la Coma s/n
46980 Paterna (València), Spain
e-mail: enrique.navarro@uv.es*

PACS: 43.20 Bi.Ks.Mv

Palabras Clave: Guías de onda, Membranas, Análisis modal, método de Diferencias Finitas en Dominio del Tiempo (FDTD)

Resumen

Este artículo describe la aplicación del método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) en combinación con la transformada discreta de Fourier (TDF), para resolver problemas de valores propios en guías acústicas y membranas de sección transversal arbitraria. Las ecuaciones son discretizadas en un dominio bidimensional en el que las condiciones de contorno están definidas sobre la presión o sobre la velocidad. La sección de la guía actúa como un resonador bidimensional. Por tanto, la respuesta espectral da las frecuencias de corte de la guía o las frecuencias de resonancia de la membrana. Una vez conocida cada frecuencia, la aplicación de la TDF proporciona la distribución espacial de los modos presión-velocidad en la sección de la guía o membrana. Se demuestra la precisión y la convergencia del método en el análisis de secciones de geometría rectangular, circular y elíptica. También, se utiliza el método para analizar la frecuencia de corte de una guía con forma de guitarra.

Abstract

It is described the application of the finite-difference method in the time domain (FDTD), coupled with the discrete

Fourier transform for solving Eigenvalue problems in acoustical waveguides and membranes of arbitrary cross-section. The governing acoustic equations are discretised in a two dimensional domain in which boundary conditions are defined over pressure or velocity. At cutoff, the cross section of a waveguide acts as a two dimensional resonator. Therefore, the spectral response gives the cutoff frequencies of the waveguide or the resonant frequencies of the membrane. Once each frequency is known, the application of the discrete Fourier transform also provides the spatial distribution of the pressure-velocity modes in the cross-section of the waveguide or membrane. The method sensitivity and its convergence is demonstrated in the analysis of a rectangular, circular, and elliptical geometry. Also, the method is used to determine cutoff frequencies in a guitar shaped waveguide.

1. Introducción

Los métodos numéricos para la modelización de estructuras acústicas están tomando fuerza desde hace varias décadas, en el análisis y la síntesis del sonido generado en o por esta estructura, debido a las diferentes características de la dinámica sonora. La simulación de instrumentos musicales resulta uno de los campos de aplicación más interesantes ya que permite estudiar y evaluar la interacción sonora entre los elementos excitadores y los resonadores.

Cuando un pulso sonoro excita una estructura de este tipo, la propagación de la onda de presión se puede descom-

poner en un número infinito de “modos acústicos” [1]. En este artículo proponemos la aplicación de la técnica de Diferencias Finitas en Dominio del Tiempo (FDTD) al análisis de estos modos de propagación en guías y en medios elásticos bidimensionales.

En el procesado de señales acústicas, el uso de guías está ampliamente difundido. El análisis de estas estructuras, en un caso real, suele ser difícil por la complejidad de las condiciones de contorno. En la literatura científica se muestran diversos métodos numéricos para encontrar las frecuencias de corte y las distribuciones modales de campo (método de los elementos finitos, métodos de operadores integrales, etc.) [2], [3], [4], [5]. Estos métodos numéricos a menudo requieren grandes recursos computacionales y una buena capacidad de programación. El método de elementos finitos (FEM), que es el preferido por su versatilidad y precisión, da soluciones espurias que otras formulaciones más recientes tratan de evitar [6] cuando son aplicadas a problemas de valores propios.

Yee propuso el método de Diferencias Finitas en Dominio del Tiempo (FDTD), [7], para estudiar la propagación de ondas electromagnéticas. Taflove, Holland, y Umashankar, [8], [9], [10] extendieron el algoritmo y el método FDTD fue aplicado satisfactoriamente a problemas de dispersión y de guías de microondas. Así, el método FDTD se ha convertido en la técnica más versátil y atractiva que se usa en el análisis de la propagación de ondas electromagnéticas, y en el estudio de dispositivos pasivos de microondas. En la referencia [11] podemos encontrar una selección de la literatura publicada sobre el método FDTD.

El método FDTD discretiza en el espacio y el tiempo las ecuaciones de Maxwell del rotacional [7], estableciendo un conjunto de ecuaciones en diferencias para las seis componentes del campo electromagnético. Estas ecuaciones presentan una precisión de segundo orden en la aproximación del cálculo de las derivadas, en el espacio y el tiempo. Las componentes del campo eléctrico se obtienen en cada instante de las componentes del campo magnético conocidas en un instante anterior. También, las componentes del campo magnético se obtienen a partir de las componentes del campo eléctrico siguiendo una técnica llamada ‘*leapfrog*’. Una técnica similar se ha utilizado para el estudio de la propagación de ondas elásticas en la que los campos magnético y eléctrico son substituidos por la tensión y la velocidad [12], [13]. La aplicación de FDTD a la propagación en acústica puede ser considerada un caso especial de la técnica anterior para el análisis de la tensión y la velocidad [14], [15] en medios elásticos. Pese a todo, en acústica, el FDTD sigue el esquema *leapfrog* utilizado en la modelización de la presión y la velocidad.

El método FDTD se ha usado en problemas de dispersión acústica [16], [17], y también para estudiar problemas de acústica arquitectónica [18],[19]. Algunas limitaciones del FDTD es su alto costo computacional y que la aplicación de las condiciones de contorno es compleja, este coste está determinado por la discretización espacial requerida, un tamaño de celda menor de $1/10$ evitará dispersión y nos permitirá modelar contornos curvos de manera escalonada (llamado en *staircase*). Para reducir coste computacional, Poorter y Boteldooren han propuesto un algoritmo de submallado (*subgridding*) [20] intentando superar los contornos en *staircase* [21]. La simplicidad de las ecuaciones FDTD ofrece gran flexibilidad, permitiendo la inclusión de viscosidades y de efectos no lineales en los problemas [22], [23]. Últimamente, el método FDTD se ha aplicado al modelado de la propagación de ultrasonidos en un fluido homogéneo termoviscoso combinando la ecuación de onda absorbente no lineal con la ecuación de difusión térmica [24].

En este trabajo, se propone analizar las frecuencias de corte y la distribución de presión-velocidad de modos acústicos en guías acústicas huecas y membranas mediante el método FDTD. El procedimiento numérico se puede extender al análisis de modos en guías y membranas de sección arbitraria. Esta formulación numérica puede ser usada para calcular las frecuencias de corte y las distribuciones de velocidad y presión, con la ventaja de una programación simple y un cálculo rápido. También puede ser fácilmente extensible al análisis de guías de ondas con una forma arbitraria y una determinada impedancia superficial, pudiéndose establecer de una forma discreta y adecuada las condiciones de contorno [16]. Por otra parte, el algoritmo FDTD tiene varias ventajas sobre otros esquemas de diferencias finitas. Primero, el método FDTD utiliza diferencias espacio-temporales centradas para aproximar las derivadas, esto proporciona una precisión de segundo orden en las derivadas espacio-temporales comparadas con otros esquemas de primer orden. Segundo, no hay necesidad de un tratamiento especial de los límites del problema. Y finalmente, el algoritmo *leapfrog* no representa disipación y sólo tiene una pequeña dispersión, la cual es despreciable, comparada con la dispersión física de la estructura en estudio [25].

Primeramente presentaremos la formulación numérica, para, a continuación, utilizarla en varias estructuras cuyas formas tienen una solución analítica conocida: rectangular y circular. Se realizan cálculos numéricos usando diferentes mallados a fin de observar la sensibilidad de la técnica. Este procedimiento es fácilmente extensible a un tubo elíptico, para la resolución del cual necesitaríamos utilizar las funciones especiales de Matthieu. Finalmente, se analiza

una guía con forma de guitarra y los resultados se comparan con los obtenidos mediante un procedimiento experimental [1].

2. Formulación

2.1 El tubo hueco rígido

Consideremos un tubo hueco rígido con una sección transversal arbitraria. También suponemos que el medio interno está repleto de aire o cualquier otro gas (con viscosidad nula), siendo este homogéneo e isótropo con densidad ρ y con velocidad de propagación del sonido c .

Las ecuaciones aplicables a este problema son las ecuaciones de Euler y las de continuidad, las cuales en tres dimensiones y en dominio del tiempo resultan,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho \cdot c^2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4)$$

donde p es la presión, y $\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z$, es la velocidad de desplazamiento.

Assumiendo simetría traslacional del tubo a lo largo del eje z (es decir suponiendo que el tubo sea infinito), podemos buscar las ondas armónicas propagativas a lo largo de z . Estas son los llamados *modos propagativos acústicos* a lo largo del tubo, estos campos tendrán una dependencia con la coordenada z de la forma y el tiempo de la forma:

$$H(x,y,z,t) = h(x,y) \cdot \cos(\omega t \pm \beta z) \quad (5)$$

donde β es la constante de propagación; $\omega = 2\pi f$, siendo f la frecuencia de la onda armónica, y H es cualquier componente de los campos de las ecuaciones anteriores (1)-(4).

Las derivadas en z en las ecuaciones (1)-(4) resultan,

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \pm j\beta H \quad (6)$$

A la frecuencia de corte ($f=f_c$), la onda acústica no se propaga. Por lo tanto, tenemos una constante de propagación $\beta=0$, y las ecuaciones (1)-(4) resultan:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho \cdot c^2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (8)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (9)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

Para resolver los modos y sus frecuencias de corte, estas ecuaciones son definidas en la sección transversal de la guía acústica con las condiciones de contorno adecuadas. Si tenemos un tubo rígido hueco, las condiciones en el contorno sobre las paredes rígidas del tubo son,

$$\nabla_t p \cdot \vec{n}|_s = 0 \quad (11)$$

donde \vec{n} es el vector unidad hacia fuera perpendicular a la superficie interior rígida S del tubo.

Las ecuaciones (7), (8) y (9), con la condición de contorno (11) y la dependencia temporal armónica nos llevan a la ecuación de Helmholtz, una ecuación elíptica que tradicionalmente se ha resuelto mediante métodos espectrales: técnicas de Diferencias Finitas (FD) o de Elementos Finitos (FE).

A continuación se describe una aproximación alternativa siguiendo un procedimiento en el dominio del tiempo.

Supongamos que se introduce una excitación en el dominio del tiempo en la sección transversal de una guía de onda. Las ecuaciones (7), (8), (9) con la condición de contorno (11) proporcionarán la evolución en el dominio del tiempo

de las tres componentes del campo p , v_x , y v_y , sobre la sección transversal del tubo. Este es un problema bidimensional en el dominio del tiempo que sólo es válido a las frecuencias de corte de los modos propagativos en el tubo. Así, después de introducir una excitación pulsada, sólo serán válidas, dentro de la sección transversal, las señales armónicas con frecuencias iguales a las frecuencias de corte de los modos propagativos. La distribución espectral del pulso incidente proporciona la amplitud de estas ondas resonantes.

Por tanto, el problema de encontrar las frecuencias de corte y los modos propagativos en un tubo tridimensional resulta bidimensional y corresponde a encontrar las frecuencias resonantes y las distribuciones de campos de velocidad y presión en la sección transversal del tubo, considerado como un resonador bidimensional.

Después de generar una excitación pulsada en la sección del tubo, el campo de presión total se puede expresar como una superposición discreta de modos, cuyas frecuencias están incluidas en el espectro del pulso temporal excitador:

$$p(x,y,t) = \sum_m c_m \phi_m(x,y) \exp(j2\pi f_m t) \quad (12)$$

donde $\phi_m(x,y)$ es la distribución espacial del modo m en la sección transversal del tubo, f_m es su frecuencia de corte, y c_m es una constante compleja.

Las ecuaciones (7)-(9) están discretizadas sobre la sección de la guía, estableciendo un mallado en el que las componentes del campo son definidas en cada nodo de manera alternativa. La celda unidad usada es la que muestra la Figura 1.

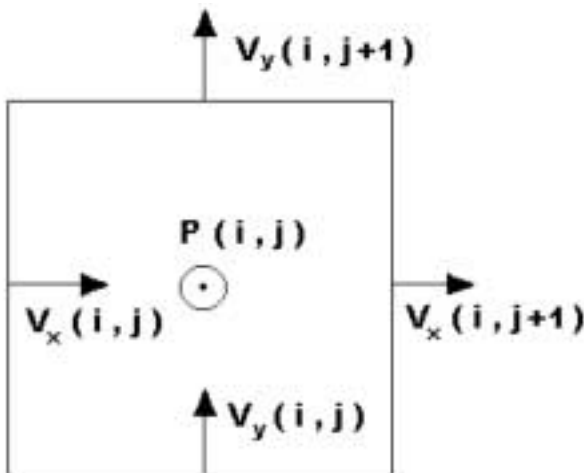


Fig.1- Celda 2D-FDTD usada en el problemas acústicos de valores propios en 2D.

El algoritmo FDTD calcula los valores del campo en instantes temporales alternados. El programa numérico que resuelve las ecuaciones discretizadas (7)-(9) tiene un bucle que calcula p y v_x , v_y , en pasos temporales alternados, a fin de conseguir una precisión de segundo orden en la aproximación numérica de las derivadas temporales. Tras cada cálculo de $p-v_x-v_y$ se realiza un incremento del tiempo en un paso temporal Δt , dando de ese modo la simulación temporal de las componentes de los campos $p-v_x-v_y$.

Concretamente, la presión en un punto dado del mallado (i, j) da una serie temporal:

$$p^n(i,j) = p(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) \quad (13)$$

con $n=0,1,2,\dots, N-1$, donde $N\Delta t$ es el tiempo total de la simulación.

La aplicación de la transformada discreta de Fourier (DFT) a la ecuación (13) resultará en una función discreta de la frecuencia,

$$F_k(i,j) = \sum_{n=0}^{N-1} p^n(i,j) \exp(-j2\pi f_k n\Delta t) \quad (14)$$

donde $f_k = k/N \Delta t$.

Esta expresión puede ser reescrita usando la ecuación (12)

$$F_k(i,j) = \sum_m c_m \phi_m(i,j) \frac{1 - \exp(j2\pi f_m N\Delta t)}{1 - \exp(j2\pi(f_m - f_k))} \quad (15)$$

Relacionando la transformada de Fourier discreta y continua [26], $F_k(i,j)$ se puede expresar como

$$F_k(i,j) = \sum_m \frac{j c_m \phi_m(i,j)}{2\pi\Delta t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{f_m - (f_k + (r/\Delta t))} \quad (16)$$

que es periódica con período N .

Así, si el teorema del muestreo se verifica [26], la expresión final para $F_k(i,j)$ es

$$F_k(i,j) = \sum_m \frac{j c_m \phi_m(i,j)}{2\pi\Delta t (f_m - f_k)} \quad (17)$$

$-k=0,1,2,\dots,N/2$,

Esta ecuación da la distribución espectral en el punto de muestreo (i, j).

Las frecuencias correspondientes al máximo de $|F_k(i,j)|$, darán, aproximadamente, las frecuencias de corte de los m modos (f_m). La resolución en frecuencia que alcanza la DFT es,

$$\Delta f = 1/N \Delta t, \quad (18)$$

Esta resolución está relacionada con el número de pasos temporales N y las dimensiones de la celda Δx y Δy a través del criterio de estabilidad [8]:

$$\frac{c}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}} \geq \Delta t \quad (19)$$

A parte de este factor, la precisión en el cálculo espectral también dependerá del proceso de simulación espacio temporal llevado a término por el método FDTD. Los intervalos de muestreo en tiempo y espacio, y la satisfacción de las condiciones de contorno que incluyen los efectos del *stair-casing* en el modelado de contornos curvos.

La distribución de los campos para cada modo, puede ser calculada una vez sean conocidas las frecuencias de corte. Las formas de los modos son obtenidas a partir de la DFT de los campos deseados a las frecuencias f_m sobre la sección transversal completa de la guía de onda.

2.2 Membranas

Las membranas son los resonadores bidimensionales más simples. Tienen sus extremos fijados, densidad de área σ , y una tensión superficial T , constante sobre toda su superficie, en el plano x - y . Cuando una pequeña área $dx \cdot dy$ es desplazada un pequeño intervalo dz , de su posición de equilibrio, la tensión superficial T actúa para restaurarla al equilibrio y la ecuación del movimiento es una ecuación de onda [1],

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 z \quad (20)$$

donde $c = \sqrt{T/\sigma}$ es la velocidad para la propagación de la onda transversal, y el operador ∇^2 se define sobre toda la sección bidimensional de la membrana, i.e. en coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} .$$

La ecuación (20) es matemáticamente idéntica a la ecuación de onda de sonido obtenida combinando (7)-(10). Así, el análisis de una membrana con extremos fijos puede ser calculada mediante el uso del algoritmo de la sección 2.1, con unos pocos cambios: z es formalmente substituida por la presión p , y la velocidad del sonido en el aire se substituye por la velocidad de propagación de la onda transversal

$$(c = \sqrt{T/\sigma})$$

Además, hay un cambio sustancial en las condiciones de contorno, ahora en los bordes de la membrana tenemos una condición de contorno homogénea de Dirichlet sobre la presión, esto significa que los bordes están fijos ($z=0$ en el borde):

$$p|_s = 0 \quad (21)$$

Por tanto, es directa la extensión del procedimiento FDTD para analizar membranas vibrantes. La utilidad de la técnica presentada se demuestra en la sección siguiente, en el modelado de membranas rectangulares y circulares, el procedimiento también sirve para simular cualquier membrana de sección transversal arbitraria.

3. Aplicaciones

La utilidad de la técnica FDTD se muestra en el análisis de los modos acústicos de un tubo hueco rectangular y uno circular. En ambos casos, para excitar un gran número de modos, se ha utilizado una distribución espacial heurística de funciones impulsivas: en $t=0$, el campo es cero en todos los puntos excepto en algunos puntos arbitrariamente localizados. Se utilizan celdas cuadradas (con $\Delta x = \Delta y = \Delta h$) y el intervalo temporal está en el límite del criterio de estabilidad $\Delta t = 0.7 \Delta h / c$.

Para estudiar la sensibilidad numérica del algoritmo, hemos analizado una guía rectangular con una sección transversal de $6.0 \times 4.0 \text{ m}^2$ con seis discretizaciones diferentes. El tubo rectangular hueco se han modelado con mallas de 12×8 , 24×16 , 48×32 , 96×64 , 192×128 y 384×256 usando celdas cuadradas y $c=340 \text{ m/s}$. El número de intervalos temporales totales se incrementa en cada mallado para obtener la misma precisión en la respuesta espectral (18), calculada con la DFT. Un mallado más grande tiene un Δh menor y así un Δt más pequeño; entonces $\Delta f = 1/N \Delta t$, se mantiene siempre a 0.1 Hz incrementando N .

Los resultados obtenidos para los primeros cinco modos se muestran en la Tabla I. Las frecuencias de corte tienen una variación poco significativa respecto al mallado, ya que la sección transversal de la guía está perfectamente modelada con los seis mallados. Por tanto, el mallado 12×8 con 9714 pasos temporales es suficientemente preciso. El cálculo para obtener una señal que cubra un espectro de hasta 500 Hz en un PC Pentium II (350 MHz) consume un tiempo de CPU de 55 s.

Tabla I- Análisis de la convergencia en la guía de sección rectangular.

Frecuencias de corte obtenidas mediante el método FDTD para los 4 primeros modos de presión en un tubo rectangular rígido con sección transversal de dimensiones 6m x 4m. Se usan seis mallados con celda cuadrada ($\Delta x = \Delta y = \Delta h$). También se proporciona la desviación de los resultados numéricos respecto de los correspondien-

	f10	%	f01	%	f20	%	f21	%	f02	%
12 x 8	28.34	0.04	42.33	0.4	56.33	0.6	70.79	0.05	83.8	1.4
24 x 16	28.34	0.04	42.45	0.11	56.56	0.19	70.79	0.05	84.7	0.4
48 x 32	28.34	0.04	42.45	0.11	56.56	0.19	70.79	0.05	84.9	0.11
96 x 64	28.34	0.04	42.33	0.4	56.33	0.6	70.79	0.05	84.9	0.11
192 x 128	28.34	0.04	42.33	0.4	56.33	0.6	70.79	0.05	84.9	0.11
384 x 256	28.34	0.04	42.33	0.4	56.33	0.6	70.79	0.05	84.9	0.11
Analíticas	28.33	—	42.50	—	56.67	—	70.83	—	85.0	—

Tabla I- Análisis de la convergencia en la guía de sección rectangular.

Con el fin de incrementar la precisión en la respuesta espectral, necesitamos un tiempo más largo de simulación (N mayor) para un mallado dado, (18)-(19). A pesar de ello, para obtener una mejora significativa en la resolución en frecuencia conseguible, son necesarios un gran número de iteraciones temporales, lo cual requiere un gran costo de tiempo de CPU.

Los contornos curvos no se pueden ajustar con mallados Cartesianos, en estos casos, al ser la celda cuadrada, se procede con bordes en escalera. Obviamente, cuando mas denso sea el mallado mejor se ajustará el contorno en escalera al contorno real de la estructura modelada. Para efectuar un análisis de la convergencia en estos casos, se procede con un tubo circular, de radio $r=0.5\text{ m}$, estudiando los resultados en función de la discretización. La sección circular se modela con celdas cuadradas y contorno en escalera para :

$$r/\Delta h=5,10,20,30,40,50, \text{ y } 100, \\ (\Delta x=\Delta y=\Delta h, \text{ y } \Delta t=0.7\Delta h /c, c=340\text{ m/s}).$$

De nuevo, el número total de pasos temporales se incrementa al incrementar el tamaño del mallado a fin de conseguir la misma precisión en la respuesta espectral.

tes datos analíticos. Las frecuencias vienen dadas en Hertz.

La Tabla II muestra las frecuencias de corte calculadas y su desviación respecto de los resultados teóricos.

En un mallado 20×20 , ($r/\Delta h=10$), el tiempo de CPU consumido para un espectro de hasta 500 Hz fue 552 s ($N=97142$). En la Tabla II, se muestra como los resultados tienden a converger al aumentar la resolución de la malla, lo cual sugiere que los contornos curvos no son una limitación para el algoritmo.

Tabla II- Análisis de la convergencia en la guía circular.

Frecuencias de corte obtenidas con FDTD para los modos 11, 21, 01 y 31, en un tubo circular rígido de radio $r=0.5\text{ m}$. Se usan 7 mallados con celda cuadrada con distinta resolución ($\Delta x=\Delta y=\Delta h$). También se proporciona la desviación de los resultados numéricos respecto los correspondientes datos analíticos. Las frecuencias viene dadas en Hertz.

R/Δh	f11	%	f21	%	f01	%	f31	%
5	184.6	7.3	294.4	10.9	403.1	2.8	497.4	9.4
10	191.8	3.6	314.0	5.0	402.4	3.0	429.6	5.5
20	193.7	2.7	317.7	3.9	406.7	1.9	435.0	4.3
30	195.4	1.8	322.6	2.4	409.3	1.3	441.1	2.9
40	196.6	1.2	324.6	1.8	411.0	0.9	445.5	2.0
50	196.7	1.2	324.9	1.7	411.1	0.9	446.0	1.9
100	198.1	0.5	328.1	0.7	413.1	0.4	450.6	0.9
Analíticas	199.07	—	330.53	—	414.72	—	454.53	—

Tabla II- Análisis de la convergencia en la guía circular.

Tabla III- Análisis de la convergencia en la membrana circular.

Frecuencias resonantes obtenidas mediante el método FDTD para los modos de presión 01, 12, 21, y 22, en una membrana circular de radio $r=0.5m$. Se usan seis mallas distintas con celda cuadrada ($\Delta x=\Delta y=\Delta h$). También se da la desviación de los resultados numéricos respecto de los correspondientes datos analíticos. Las frecuencias vienen dadas en Hertz.

ción anterior, $c=340\text{ m/s}$. Haciendo estos cambios, se modifica el modelo físico y también la respuesta espectral. Exactamente los mismos mallas y discretizaciones. Se repiten los mismos mallas y discretizaciones en espacio y tiempo para las membranas rectangular y circular con el mismo N , para obtener la misma precisión en la respuesta espectral, 0.1Hz . La Tabla III presenta los resultados numéricos de las frecuencias de resonancia de la membrana circular comparadas con sus valores teóricos. Vemos que los resultados convergen al incrementar la resolución del malla de la misma

r/Δh	f01	%	f12	%	f21	%	f22	%
5	240.2	7.7	381.0	8.1	514.9	7.3	623.4	4.3
10	250.0	3.8	398.4	4.0	536.0	3.5	572.9	4.1
20	255.0	2.1	406.0	2.1	544.2	2.1	584.5	2.2
30	257.1	1.3	409.6	1.2	549.1	1.2	589.9	1.3
40	258.0	0.9	411.0	0.9	551.3	0.8	592.0	0.9
50	258.3	0.8	411.5	0.7	551.9	0.7	592.7	0.8
100	259.3	0.4	413.1	0.4	553.8	0.3	595.1	0.4
Analíticas	260.3	—	414.6	—	555.7	—	597.4	—

Tabla III- Análisis de la convergencia en la membrana circular.

El análisis de membranas se realiza con los mismos programas, simplemente cambiando la condición de contorno. En el análisis de la guía de ondas se aplica sobre la velocidad normal a la pared de la guía (11), y en el análisis de la membrana la condición de contorno está puesta sobre la presión en el borde (21). En este caso, la velocidad para la

manera que en el análisis de la guía circular. Los resultados para las frecuencias de resonancia de la membrana rectangular son coincidentes con las frecuencias de corte del tubo de sección rectangular ($f_{n,m}$) para $n, m > 0$, [1], por lo que no los mostramos.

propagación de la onda transversal ($c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$) es igual a la velocidad del sonido en la simula-

Finalmente, calculamos los modos de un tubo con forma elíptica y con forma de guitarra. El tratamiento analítico de la forma elíptica es especialmente complejo, ya que involu-

cra el uso de funciones especiales de Matthieu. A pesar de ello, en la modelización FDTD, se define simplemente el contorno elíptico en un bucle del código Fortran. Los resultados de la respuesta espectral se muestran en la Fig.2. Los primeros modos de la guía elíptica se muestran en la Tabla IV y su representación gráfica se puede observar en las Fig.3.a-b-c.

Tabla IV- Análisis de la convergencia en la guía de onda elíptica.

Frecuencias obtenidas mediante FDTD para varios modos de presión en un tubo rígido de sección elíptica de eje mayor $a=0.5m$, excentricidad $e=0.75$. Los resultados están normalizados a la frecuencia de resonancia del modo impar-11. Se han usado 3 mallados con $\Delta x=\Delta y=\Delta h$. También se proporciona la desviación de los resultados numéricos respecto de los correspondientes analíticos.

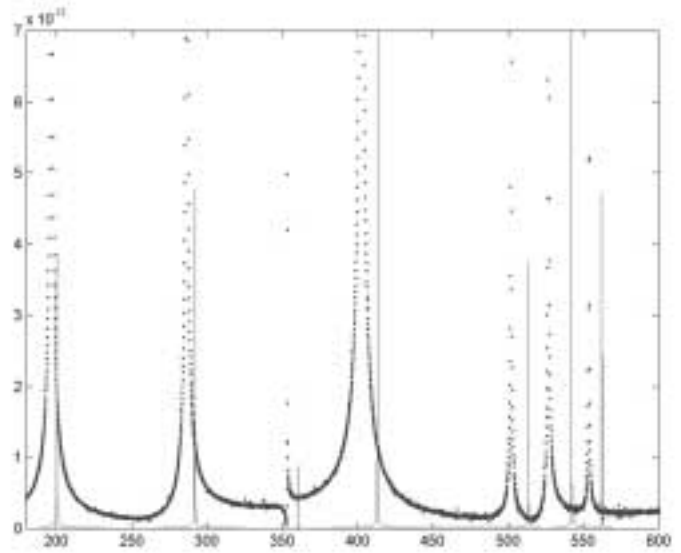


Fig.2- Respuesta espectral en el tubo de forma elíptica (o o o) $a/\Delta h =40$, (—) $a/\Delta h =200$.

A/ Δh	fo11/fe11	%	fe21/fe11	%	fo21/fe11	%	fe31/fe11	%	fo31/fe11	%
40	1.4439	1.2	1.7844	1.0	2.0464	1.4	2.5523	0.8	2.6276	3.6
60	1.4562	0.3	1.7965	0.3	2.0464	1.3	2.5523	0.8	2.6783	1.6
200	1.4586	0.2	1.7992	0.2	2.0639	0.3	2.5655	0.2	2.7080	0.5
Analit.	1.4610	—	1.8024	—	2.0695	—	2.5717	—	2.7222	—

Tabla IV- Análisis de la convergencia en la guía de onda elíptica.

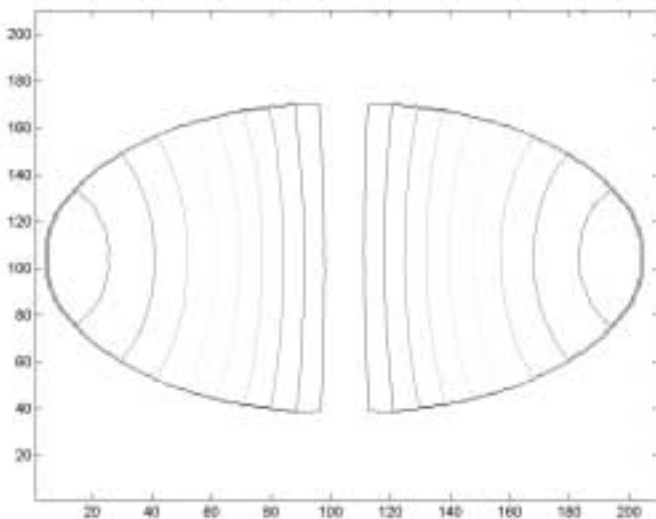


Fig. 3 (a). Distribución de presión para algunos modos del tubo de forma elíptica par-11

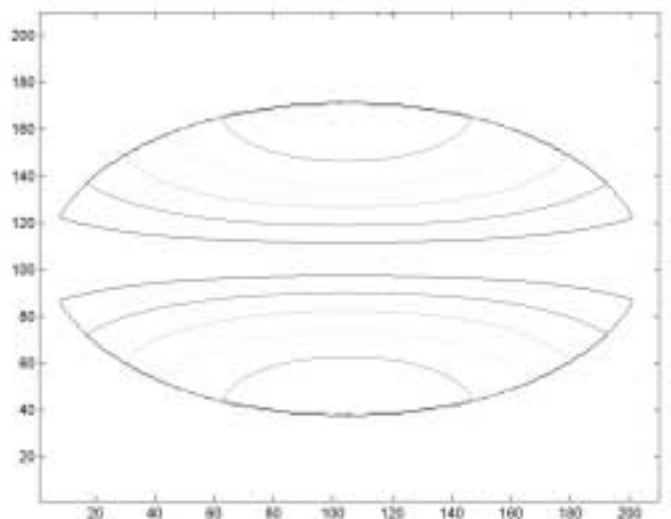


Fig. 3 (b). Distribución de presión para algunos modos del tubo de forma aléptica impar-11.

La modelización de la guía en forma de guitarra proporciona información de la respuesta espectral de esta forma, ya que la resonancia transversal se produce a frecuencias más bajas que la resonancia longitudinal entre las tapas, lo cual nos sirve para estudiar los primeros modos de aire (A0 y A1) de la guitarra. La Tabla V muestra las frecuencias de resonancia obtenidas. La comparación es difícil, porque depende de la forma exacta de la guitarra y cuando más alta es la frecuencia en los modos de aire más acoplamiento hay con las tapas. De los resultados obtenidos podemos extraer algunas conclusiones interesantes: el error en la frecuencia versus el tamaño de la celda es lineal en contornos curvos en los que se utiliza la aproximación en escalera. Al aumentar el tamaño de la malla (disminuyendo el de la celda) los “contornos numéricos” convergen a los contornos reales, para cada mallado tenemos un dominio diferente que se aproxima al dominio real. Por lo tanto, se pierde el segundo orden de precisión al alcanzar las frecuencias de resonancia cuando utilizamos contornos en escalera [27]. A pesar de todo, cuando los “contornos numéricos” se ajustan a los reales, se alcanza de nuevo el segundo orden de precisión en el cálculo de los campos. El error en las frecuencias de resonancia puede ser asociado a la resolución en la posición de los máximos y los nulos de los campos a lo largo del dominio numérico, por ejemplo en la guía rectangular (correspondiente a la Tabla I). Aquí no se muestran los

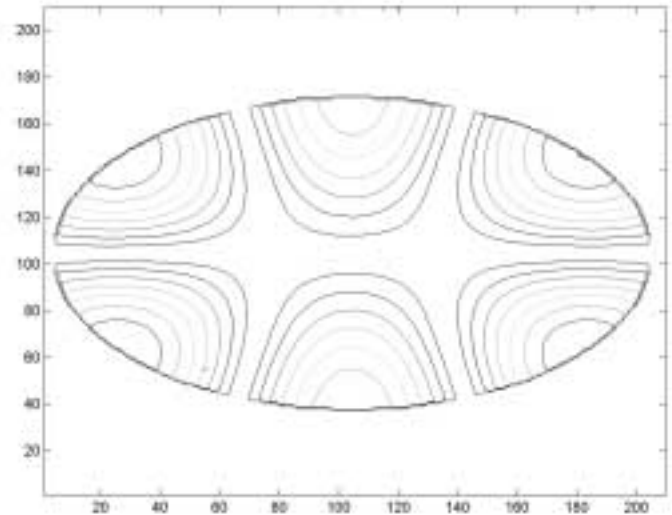


Fig. 3 (c). Distribución de presión para algunos modos del tubo de forma eléptica impar-31.

resultados donde se ve que se ha alcanzado el segundo orden de precisión, pero se pueden ver en la referencia [27].

Tabla V-Frecuencias de corte de los 10 primeros modos en un tubo de sección con forma de guitarra.

En la segunda línea de la tabla se indican las frecuencias de los 2 primeros modos de la cavidad con forma de guitarra (Kohno 30) de la referencia [1] .

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
frequency	166.8	371.1	493.4	543.5	581.3	667.6	736.2	749.6	778.9	25.1
(Ver ref. [1])	118	396								

Tabla V-Frecuencias de corte de los 10 primeros modos en un tubo de sección con forma de guitarra.

4. Conclusiones

En este artículo se describe un método simple, eficiente y alternativo para estudiar guías acústicas huecas y membranas. Se ha examinado la sensibilidad del método en función de la dimensión de la celda y del contorno en escalera, comparando los resultados numéricos derivados para varias densidades del mallado en formas rectangulares, circulares y elípticas. Se observa que la aproximación en escalera para contornos no planos influye en el cálculo de frecuencias de resonancia. El error en frecuencia vs el tamaño de la celda tiene una relación lineal, con una pendiente dependiente del modo calculado. Pese a todo en problemas de valores propios en los que los contornos numéricos coinciden con los contornos reales, se recupera el segundo orden de precisión aumentando el tamaño de la celda.

5. Agradecimientos

Este trabajo de investigación ha sido financiado por la Universitat de València y la Generalitat Valenciana, bajo los proyectos UV 98-2719 y GV 98-14-126 y en colaboración con la empresa de construcción de organos Berenguer y Diaz C.B. de Paterna (València).

6. Referencias

[1] N. H. Fletcher and T. D. Rossing, ‘The physics of Musical Instruments’, Springer-Verlag, New York 1991.
 [2] M. Guerich and M. A. Hamdi, ‘A numerical method for vibro-acoustic problems with incompatible finite ele-

ment meshes using B-spline functions', J. Acoust. Soc. Am., Vol.105, No.3, pp.1682-1694, March 1999.

[3] F. Fontana, and D. Rocchesso, 'Physical Modeling of Membranes for Percussion Instruments', ACUSTICA-acta acustica, Vol.84, pp.529-542, 1998.

[4] J. Bretos, C. Santamaria, and J. Alonso-Moral, 'Vibrational patterns and frequency responses of the free plates and box of a violin obtained by finite element analysis', J. Acoust. Soc. Am., Vol.105, No.3, pp.1942-1950, March 1999.

[5] A-C. Hladky-Hennion and R. Bossut, 'Time analysis of immersed waveguides using the finite element method', J. Acoust. Soc. Am., Vol.104, No.1, pp.64-71, Jul.1998.

[6] T. Angkaew, M Masanori, and N. Kumagai, 'Finite element analysis of waveguide modes: a novel approach that eliminates spurious modes', IEEE Trans. Microw. Theory Techniques, vol.MTT-35, (2), pp.117-123, 1987.

[7] K.S. Yee, 'Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media', IEEE Trans. Antenna Propagat., vol. AP-14, (5), pp.302-307, 1966.

[8] A. Taflove, and M.E. Brodwin, "Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time dependent Maxwell's equations," IEEE Trans. Microw. Theory Techniques, vol.MTT-23, (8), pp.623-630, 1975.

[9] R. Holland, L. Simpson, and K. Kunz, "Finite difference analysis of EMC coupling to lossy dielectric structures," IEEE Trans. Electromagnetic Compat., vol. EMC-22, pp.203-209, 1980.

[10] K. Umashankar, and A. Taflove, "A novel method to analyze electromagnetic scattering of complex objects," IEEE Trans. Electromagnetic Compat., vol. EMC-24, pp.397-405, 1982.

[11] Kurt L. Shlager and John B. Schneider, "A selective survey of the Finite-Difference Time-Domain Literature", IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol.37, no.4, August 1995, pp.39-56.

[12] R. Madariaga, "Dynamics of an expanding circular fault," Bull. Seismol. Soc. Am., vol.66, pp.639-666, 1976.

[13] J. Virieux, "SH-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite difference method," Geophysics, vol.49, pp.1933-1942, 1984.

[14] Q-H. Liu, E. Schoen, F. Daube, C. Randall, H-L. Liu, and P. Lee,"A three-dimensional finite difference simulation of sonic logging," J. Acoust. Soc. Am., Vol.100, No.1, pp.72-79, 1996.

[15] Y-H. Chen, W.C. Chew, and Q-H. Liu, "A three-dimensional finite difference code for the modeling of sonic logging tools," J. Acoust. Soc. Am., Vol.103, No.2, pp.702-712, 1998.

[16] S. Wang, 'Finite-difference time-domain approach to underwater acoustic scattering problems', J. Acoust. Soc. Am., Vol.99, No.4, Pt.1, pp. 1924-1931, Apr.1996.

[17] F.D. Hastings, J.B. Schneider, and S.L. Broschat, 'A finite-difference time-domain solution to scattering from a rough pressure-release surface', J. Acoust. Soc. Am., Vol.102, No.6, pp.3394-3400, 1997.

[18] D. Botteldooren, 'Finite-difference time-domain simulation of low-frequency room acoustic problems', J. Acoust. Soc. Am., Vol.98, pp.3302-3308, 1995.

[19] J. LoVetri, D. Mardare, and G. Soulodre, 'Modeling of the seat dip effect using the finite-difference time-domain method', J. Acoust. Soc. Am., Vol.100, pp.2204-2212, 1996.

[20] J. De Poorter, and D. Botteldooren, "Acoustical finite-difference time-domain simulations of subwavelength geometries," J. Acoust. Soc. Am., Vol.104, no.3, pp.1171-1177, 1998.

[21] D. Botteldooren, 'Acoustical finite-difference time-domain simulation in quasi-Cartesian grids,' J. Acoust. Soc. Am., Vol.95, no.5, pp.2313-2319, 1994.

[22] D. Botteldooren, "Vorticity and entropy boundary conditions for acoustical finite-difference time-domain simulations," J. Acoust. Soc. Am., Vol.102, pp.170-178, 1997.

[23] D. Botteldooren, "Numerical model for moderately nonlinear sound propagation in three-dimensional structures," J. Acoust. Soc. Am., Vol.100, pp.1357-1367, 1996.

[24] I.M. Hallaj, R.O. Cleveland, "FDTD simulation of finite-amplitude pressure and temperature fields for biomedical ultrasound," J. Acoust. Soc. Am., Vol.105, no.5, pp.L7-L12, 1999.

[25] X. Zhang, and K.K. Mei, 'Time-domain finite difference approach to the calculation of the frequency-dependent characteristics of microstrip discontinuities', IEEE Trans., 1988, MTT-36, (12), pp. 1775-1787

[26] E.O. Brigham, *The fast Fourier transform and its applications*, Prentice-Hall, 1988.

[27] E.A. Navarro, N.T. Sangary, and J. Litva, "Some Considerations on the accuracy of the non-uniform FDTD method and its application to waveguide analysis when combined with the Perfect Matched Layer", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol.44, no.7, pp.1115-1124, July 1996.